DOI: 10.3969/j.issn.1004-4701.2019.01-07

基于极值原理的瞬时单位线法在洪峰求解中的应用研究

周 斌

(广东省汕尾市水利水电规划设计院,广东 汕尾 516600)

摘 要:工程中采用瞬时单位线法计算洪水时,洪峰均是从有限的计算节点上统计最大值作为洪峰,存在一定误差. 当有较高精度要求时,不宜仅统计有限计算节点上的洪水最大值作为设计洪峰. 采用瞎子爬山法和半分法计算洪峰流量,算法简洁明晰,计算开销有限,收敛速度快,是优良的计算方法,可供广大设计同行参考使用.

关键词:瞬时单位线;洪峰;瞎子爬山法;半分法

中图分类号:TV122+.5 **文献标识码:**B **文章编号:**1004-4701(2019)01-0042-04

0 引 言

1945 年 C.O.Clark 提出了瞬时单位线的概念,1957 年 J.E.Nash 推导出瞬时单位线的数学方程,从而发展了通过暴雨计算洪水的单位线法。我国多省先后率定了瞬时单位线的参数,使瞬时单位线法在我国得到了广泛应用。

瞬时单位线法计算洪水时,可采用固定的计算时段计算洪水过程,并取其中的最大值作为设计洪峰;也可采用预先指定描述洪水过程的时刻,再逐时刻计算洪水流量形成洪水过程[1]。两种方法的洪峰均是从有限的计算节点上统计取值,洪峰存在一定误差,需要进一步研究简洁、可靠、高效的洪峰算法。

1 瞬时单位线的基本原理[1,2]

瞬时单位线是指当输入均匀分布的单位瞬时脉冲雨量(地面净雨)时,经过 n 个线性串联水库的调蓄作用,在流域出口断面形成的地面径流过程。瞬时单位线的计算公式为:

$$u(0,t)=\frac{1}{K\cdot\Gamma(n)}\cdot\left(\frac{t}{K}\right)^{n-1}e^{-\frac{t}{K}} \quad (1)$$

式中:n、K 为参数;Γ 为伽玛函数;t 为时间,h。

根据瞬时单位线 $u(0,t)$ 的定义,对任意时刻 t_0,出口断面的地面径流可用积分表示为:

$$q(t_0)=\frac{F}{3.6}\cdot\int_0^{t_0}I(t)\cdot u(0,t_0-t)\cdot \mathrm{d}t \quad (2)$$

式中:$I(t)$ 为时刻 t 的地面净降雨强度。

如 $\triangle t_i$ 时段内降雨强度近似保持不变,即在时段 $\triangle t_i$ 内近似有 $I(t)\approx\overline{I}_i=\frac{hi}{\triangle ti}$,对于任意的 $t_n=\triangle t_1+\triangle t_2\cdots+\triangle t_n$,式(2)可展开写为:

$$q(t_n)=\frac{F}{3.6}\cdot\left[\frac{h_1}{\triangle t_1}\int_{t_n-\triangle t_1}^{t_n}u_1(0,t)\cdot\mathrm{d}t+\frac{h_2}{\triangle t_2}\int_{t_n-\triangle t_1-\triangle t_2}^{t_n-\triangle t_1}u_2(0,t)\cdot\mathrm{d}t+\cdots+\frac{h_n}{\triangle t_n}\int_{t_n-\triangle t_1-\triangle t_2\cdots-\triangle t_n}^{t_n-\triangle t_1-\triangle t_2\cdots-\triangle t_{n-1}}u_n(0,t)\cdot\mathrm{d}t\right] \quad (3)$$

常利用 S 曲线来进行转换,S 曲线的公式为:

$$S(t)=\frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^{\frac{t}{K}}\left(\frac{t}{K}\right)^{n-1}e^{-\frac{t}{K}}\cdot\mathrm{d}\left(\frac{t}{K}\right) \quad (4)$$

于是有:

$$u(\triangle t,t)=\int_{t-\triangle t}^{t}u(0,t)\cdot\mathrm{d}t=S(t)-S(t-\triangle t) \quad (5)$$

因 $u_i(\triangle t_i,t_n-\sum_{k=1}^{i-1}\triangle t_k)=\int_{t_n-\sum_{k=1}^{i}\triangle t_k}^{t_n-\sum_{k=1}^{i-1}\triangle t_k}u_i(0,t)\cdot\mathrm{d}t$,式(3)也

收稿日期:2018-08-26
作者简介:周斌(1972-),男,大学本科,高级工程师.

可写为下式：

$$q(t_n)=\frac{F}{3.6}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{h_i}{\triangle t_i}\cdot u_i(\triangle t_i,t_n-\sum_{k=1}^{i-1}\triangle t_k)\right] \quad (6)$$

洪水由地面径流、地下径流和深层地下径流组成，地下径流常概化为三角形，深层地下径流常采用常量[2]。即当时 $q(t_0)>0$ 有：

$$Q(t_n)=q(t_n)+\frac{Q_{gm}\cdot t_n}{T}+q_g \quad (7)$$

式中：Q_{gm} 为地下径流峰值；T 为地面径流总历时；q_g 为深层地下径流量。

2　洪峰发生的最早可能时间

由于暴雨时程分布通常具有指数衰减关系，最大暴雨强度往往对洪水的形成有关键的作用。$u(0,t)$ 的地面径流上涨历时 $t_{p0}=(n-1)\cdot K$，瞬时单位线 $u(0,t)$ 具有急涨缓降特性，即对任意 $\triangle t$ 有 $u(0,t_{p0}-\frac{\triangle t}{2})<u(0,t_{p0}+\frac{\triangle t}{2})$，则 $u(\triangle t,t)=\int_{t-\triangle t}^{t}u(0,t)\mathrm{d}t$ 的峰值必定位于区间 $(t_{p0}+\frac{\triangle t}{2},t_{p0}+\triangle t)$ 内[1]。因此，洪峰发生的时刻必定位于最大暴雨强度时段开始的 $t_{p0}+\frac{\triangle t}{2}$ 后，因此可从该时刻开始试算洪峰。

3　瞎子爬山法计算洪峰流量

瞎子爬山法是华罗庚提出的一种优选法，是一种适用于无约束优化问题的摸索试验性方法。这种方法有如瞎子爬山，看不见山顶，又想爬到山顶，于是开始试探，向某个方向迈步；如果下一步高于当前步则继续向前；如果下一步低于当前步则退回原位继续以更小的步长向两边迈步试探，直至步长降低至满足精度要求。

3.1　基本过程

求解式(7)的极大值，也可视为一个无约束优化问题。瞎子爬山法是求解无约束优化问题的一种简单方法，其步骤为：

(a) 准备：先取式(7)的一个起始点(如 t_i)，

(b) 计算：以步长△t 向左、向右爬，用式(7)计算 $Q(t_i-\triangle t)$、$Q(t_i)$、$Q(t_i+\triangle t)$。

(c) 控制：比较 $Q(t_i-\triangle t)$、$Q(t_i)$、$Q(t_i+\triangle t)$ 的大小。当 $Q(t_i)$ 不是最大值时，取最大值为新的起始点转 b)步；当 $Q(t_i)$ 是最大值时，减小步长 $\triangle t$ 转 b)步。

(d) 结束：当△t 充分小或者计算的 $Q(t_i-\triangle t)$、$Q(t_i)$、$Q(t_i+\triangle t)$ 差值充分小，结束计算。

3.2　算例

已知江西省某流域[3]流域面积为 161km²，降雨过程 3h，净雨及主要参数见表 1[3]。

表 1　江西某流域暴雨洪水计算基本数据摘录表(3h)

时段序号	净雨/mm	净雨强/(mm/h)	n	K
1	0.9	0.3	2	3.31
2	0	0	2	—
3	11.8	3.93	2	3.31
4	43.8	14.6	2	2.49
5	143.3	47.8	2	1.82
6	16.9	5.63	2	3.21
7	6.1	2.03	2	3.31

地下径流峰值为 35.8m³/s，地面径流总历时 54h(暴雨历时+时段单位线历时)。取深层地下径流 $q_g=0$。取起始计算时段为 3h，起始计算时刻为 $12+(n-1)\cdot K+\frac{\triangle t}{2}=15.3$h。瞎子爬山法计算过程见表 2。

经过 8 次爬山，计算的成果已充分接近，洪峰流量为 1 419m³/s。而常规固定时段($\triangle t=3$h)计算的洪峰流量为 1 339m³/s[3]，约偏小 5.6%。

4　半分法计算洪峰流量

半分法是一元非线性方程求根的一种常用近似值算法，该方法求函数的 $f(x)=0$ 解，先定义一个区间 $[a,b]$，使其包含方程式的根，取 $m=\frac{a+b}{2}$，若 $f(m)$ 与 $f(a)$ 同号则新解区间可缩小为 $[m,b]$，否则新解区间可缩小为 $[a,m]$。多次重复该过程，即可将解区间缩小至符合精度要求。

4.1　基本过程

对于函数 $Q(t)$，在极值处有 $Q'(t)=0$。又有 $u'(\triangle t,$

表 2　瞎子爬山法计算江西某流域瞬时单位线法洪峰过程

爬山次数	t_i /h	$\triangle t$ /h	$Q(t_i-\triangle t)$/(m³/s)	$Q(t_i)$/(m³/s)	$Q(t_i+\triangle t)$/(m³/s)	后续操作
1	15.30	3.00	334.3	1 397.4	892.2	缩小步长
2	15.30	1.50	879.1	1 397.4	1 251.3	缩小步长
3	15.30	0.75	1 171.4	1 397.4	1 390.8	缩小步长
4	15.30	0.38	1 301.3	1 397.4	1 419.0	后移一步
5	15.68	0.38	1 397.4	1 419.0	1 389.6	缩小步长
6	15.68	0.19	1 416.0	1 419.0	1 409.4	缩小步长
7	15.68	0.10	1 419.4	1 419.0	1 415.4	前移一步
8	15.58	0.10	1 415.5	1 419.4	1 419.0	—

$t)=\left[\int_{t-\triangle t}^{t}u(0,t)\,\mathrm{d}t\right]'=u(0,t)-u(0,t-\triangle t)$，若令 $t=\triangle t_1+\triangle t_2\cdots+\triangle t_n$，则有：

$$Q'(t)=q'(t)+\frac{Q_{gm}}{T}=\frac{F}{3.6}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{h_i}{\triangle t_i}\left[u_i\left(0,t-\sum_{k=1}^{i-1}\triangle t_k\right)-u_i\left(0,t-\sum_{k=1}^{i}\triangle t_k\right)\right]+\frac{Q_{gm}}{T}=0 \quad (8)$$

可据式(8)先确定洪峰发生时间 t_m，再根据式(6)和式(7)求出洪峰 Q_m。式(8)可归类为一元非线性方程求根问题，该问题虽然可采用半分法、不动点迭代法、Newton 迭代法等方法求解，由于式(8)不易保证不动点迭代法的收敛性、$u(0,t)$求导较为复杂，故重点讨论半分法。半分法计算步骤为：

(a) 准备：先取式(8)的一个起始点(如 t_i)和步长(如$\triangle t$)，令 $t_{i+1}=t_i+\triangle t$，应能满足 $Q'(t_i)\geqslant 0$、$Q'(t_{i+1})\leqslant 0$。否则令起始点向前或后移动，直至满足 $Q'(t_i)\geqslant 0$、$Q'(t_i+\triangle t)\leqslant 0$。

(b) 计算：取 $t_m=\frac{t_i+t_{i+1}}{2}$、$\triangle t=t_{i+1}-t_i$，计算 $Q'(t)$。

(c) 控制：若 $Q'(t)\geqslant 0$，则取新的 $t_i=t_m$；否则取新的 $t_{i+1}=t_m$；相应$\triangle t$ 减半。转步(b)继续迭代计算。

(d) 结束：当$\triangle t$ 充分小则结束迭代计算。

(e) 将迭代得到的 t_m 代入式(7)计算洪峰。

4.2 算例

与瞎子爬山法采用同一算例。取计算起始时刻 t_i=15.3h，初始步长$\triangle t$=3h，初始 t_{i+1}=18.3h、t_m=16.8h。则计算洪峰发生时间的过程见表 3。

经 7 次半分迭代后，$\triangle t$ 不足 0.05h，可满足精度要求。

表 3　半分法计算江西某流域瞬时单位线法洪峰发生时间过程

半分次数	t_m /h	$\triangle t$ /h	$Q'(t_i)$	$Q'(t_m)$	$Q'(t_{i+1})$	$Q(t_m)$/(m³/s)	新解区间
1	16.8	3	16.647	−27.09	−26.748	1 251.3	[15.3，16.8]
2	16.05	1.5	16.647	−15.331	−27.09	1 390.8	[15.3，16.05]
3	15.675	0.75	16.647	−2.803	−15.331	1 419.1	[15.3，15.675]
4	15.487 5	0.375	16.647	5.853	−2.803	1 415.9	[15.487 5，15.675]
5	15.581 25	0.187 5	5.853	1.299	−2.803	1 419.2	[15.581 25，15.675]
6	15.628 125	0.093 75	1.299	−0.806	−2.803	1 419.6	[15.581 25，15.628 125]
7	15.604 687 5	0.046 875	1.299	0.232	−0.806	1 419.5	—

5 结　语

无论是采用固定的计算时段计算洪水，还是采用预先指定描述洪水过程的时刻计算洪水，洪峰均是从有限的计算节点上统计取最大值，洪峰是存在一定误差的。对于洪峰成果或对洪水过程有较高精度要求时，不宜仅统计有限计算节点上的洪水最大值作为设计洪峰。瞎子爬山法和半分法计算洪峰流量，算法简洁明晰，计算开销有限，收敛速度快，是优良的计算方法，可供广大设计同行参考使用。

参考文献：

[1] 周斌. 瞬时单位线计算地面径流峰值的探讨[J]. 江西水利科技，2018(5)：369~372.

[2] 叶守泽，许静仪，王祥三，等. 水文水利计算[M]. 北京：中国水利水电出版社，1992 年.

[3] 江西省暴雨洪水查算手册[M]. 南昌：江西省水文局，2010 年.

编辑：张绍付

Research on the application of the Nash Unit Line method of flood peak calculation based on extreme value principle

ZHOU bin

(Shanwei Municipal Water Resources and Hydropower Planning and Design Institute of Guangdong Province, Shanwei 516600, China)

Abstract: When the Nash Unit Line method is used to calculate the flood peak in a project, the maximum value of the flood peak is taken as the flood peak from the limited calculation node, and there is a certain error. When higher accuracy is required, it is not appropriate to count only the maximum flood value at the limited calculation node as the design flood peak. The blind mountain-climbing method and the semi-divided method are excellent methods for calculating flood peak flow, which are simple and clear, have limited calculation overhead and fast convergence speed, and can be used by many design colleagues for reference.

Keywords: Nash unit line; Flood peak; Blind mountain climbing method; Semi-divided method

翻译：周　斌