DOI: 10.3969/j.issn.1004-4701.2019.01-06

偏置三维内裂纹单轴拉伸裂纹扩展数值模拟

刘丹珠[1],王义兴[1],肖　望[2]

(1.江西省水利规划设计研究院,江西　南昌　330029; 2.连云港金海岸开发建设有限公司,江苏　连云港　222000)

摘　要: 为研究偏置三维内裂纹在单轴应力下的裂纹扩展过程,利用三维裂纹计算软件 Franc3d 软件进行了数值模拟,得到了裂纹扩展过程及裂纹前缘的应力强度因子变化,计算结果表明:(1)单轴拉力作用下,预制裂纹尖端首先出现翼型裂纹,随后裂纹逐渐向四周扩展,裂纹先贯穿试件左右两面,而后贯穿试件的前后面形成贯穿型裂纹.(2)三维预制内裂纹倾角 α=0°、30°时,预制裂纹尖端翼裂纹扩展后期两个翼裂纹呈现相互吸引的规律,而当三维预制内裂纹倾角 α=45°、60°时,翼裂纹之间则不存在相互吸引靠近的趋势,预制裂纹内侧尖端的翼裂纹扩展要小于预制裂纹外侧尖端.(3)相对Ⅰ型应力强度因子随着预制裂纹尖端距离的变化(从相对距离 0 变化到相对距离 1)呈现先增大后减小再增大再减小的规律,相对Ⅱ型应力强度因子随着预制裂纹尖端距离的变化呈现先减小后增大再减小再增大的趋势.

关键词: 偏置三维内裂纹;单轴拉伸;裂纹扩展;数值模拟

中图分类号: TV223.1　　**文献标识码:** A　　**文章编号:** 1004-4701(2019)01-0035-07

0　引　言

材料中普遍含有缺陷这一事实自 Griffith 经典断裂理论奠基后便为广大断裂力学学者所认同[1],对于广泛存在于水利、采矿、煤炭领域的岩体中的裂纹以及缺陷,对岩体材料强度影响巨大[2-4]。对于工程中的岩体结构来讲,其抗拉强度远小于抗压强度,因此岩体在拉应力作用下更容易发生破坏。同时,多裂纹扩展贯通是导致岩体失稳的重要因素[5,6],因此,对拉应力下的裂纹扩展规律的认识十分重要。

对于试样多裂纹扩展的规律,国内外许多学者进行了大量有意义的研究:如 Horri[7]基于裂纹前缘的应力状态推导了应力强度因子的表达式,对裂纹相互作用机理进行了研究;Tang[8]对多裂纹相互作用进行了试验研究;黄明利[9]利用含两条表面裂纹的 PMMA 板在单轴应力下的裂纹相互作用机理及扩展贯通模式进行了室内的试验研究。以上研究主要针对于二维穿透性裂纹或者是三维表面裂纹,但是事实上裂纹主要以三维内裂纹形态存在于岩体之中,且对岩石的力学性能及复杂应力下的破坏模式影响巨大,因此,对三维内裂纹多裂纹扩展贯通模式的研究意义重大。

本文利用 Franc3d 软件,对单轴拉伸下含双内裂纹试件的裂纹贯通扩展过程以及裂纹尖端的应力强度因子进行了数值模拟,为正确认识含三维内裂纹岩体的裂纹扩展特性提供一定的参考。

1　计算理论

1.1　应力强度因子计算理论

J 积分可以表示成以下形式[10]:

$$J=\int_A\left(\sigma_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x}-\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\delta_{ij}\right)\frac{\partial q}{\partial x}\mathrm{d}A \tag{1}$$

式中:δ_{ij} 为克罗狄克符号,q 为赋值函数,A 为计算积分域。

收稿日期:2018-12-11
作者简介:刘丹珠(1984-),男,硕士,工程师.

应力强度因子 K_{I}，K_{II}，K_{III}，与 J 积分的关系可以表示为以下形式：

$$J=\frac{1-\nu^2}{E}K^2{}_{\mathrm{I}}+\frac{1-\nu^2}{E}K^2{}_{\mathrm{II}}+\frac{1+\nu}{E}K^2{}_{\mathrm{III}} \tag{2}$$

式中：K_{I}，K_{II}，K_{III}，分别为Ⅰ型，Ⅱ型，Ⅲ型应力强度因子；E 为弹性模量；ν 为泊松比。

应力应变位移关系可以表述为：

$$\sigma_{ij}=\sigma^{(1)}{}_{ij}+\sigma^{(2)}{}_{ij} \tag{3}$$

$$\varepsilon_{ij}=\varepsilon^{(1)}{}_{ij}+\varepsilon^{(2)}{}_{ij} \tag{4}$$

$$u_i=u^{(1)}{}_i+u^{(2)}{}_i \tag{5}$$

$$K_i=K^{(1)}{}_i+K^{(2)}{}_i \tag{6}$$

其中应力应变以及位移上的(1)与(2)为两种独立的线弹性状态，将式(6)代入式(2)，可得：

$$J=J^{(1)}+J^{(2)}+M^{(1,2)} \tag{7}$$

其中：

$$J^{(1)}=\frac{1-\nu^2}{E}(K^{(1)}{}_{\mathrm{I}})^2+\frac{1-\nu^2}{E}(K^{(1)}{}_{\mathrm{II}})^2+\frac{1+\nu}{E}(K^{(1)}{}_{\mathrm{III}})^2 \tag{8}$$

$$J^{(2)}=\frac{1-\nu^2}{E}(K^{(2)}{}_{\mathrm{I}})^2+\frac{1-\nu^2}{E}(K^{(2)}{}_{\mathrm{II}})^2+\frac{1+\nu}{E}(K^{(2)}{}_{\mathrm{III}})^2 \tag{9}$$

$$M^{(1,2)}=2\left[\frac{1-\nu^2}{E}K^{(1)}{}_{\mathrm{I}}K^{(2)}{}_{\mathrm{I}}+\frac{1-\nu^2}{E}K^{(1)}{}_{\mathrm{II}}K^{(2)}{}_{\mathrm{II}}+\frac{1+\nu}{E}K^{(1)}{}_{\mathrm{III}}K^{(2)}{}_{\mathrm{III}}\right] \tag{10}$$

其中：

$$K^{(1)}{}_{\mathrm{I}}=\frac{E}{2(1-\nu^2)}M^{(1,2a)} \tag{11}$$

$$K^{(1)}{}_{\mathrm{II}}=\frac{E}{2(1-\nu^2)}M^{(1,2b)} \tag{12}$$

$$K^{(1)}{}_{\mathrm{III}}=\frac{E}{2(1-\nu^2)}M^{(1,2c)} \tag{13}$$

$$M^{(1,2)}=\int_A\left(\begin{array}{c}\sigma^{(1)}{}_{ij}\dfrac{\partial u^{(2)}{}_i}{\partial x}+\sigma^{(2)}{}_{ij}\dfrac{\partial u^{(1)}{}_i}{\partial x}-\\ \sigma^{(1)}{}_{ij}\varepsilon^{(2)}{}_{ij}\delta_{ij}-\sigma^{(2)}{}_{ij}\varepsilon^{(1)}{}_{ij}\delta_{ij}\end{array}\right)\frac{\partial q}{\partial x}\mathrm{d}A \tag{14}$$

因此利用 M 积分便可计算出 3 个应力强度因子，本文所使用的 Franc3d 软件正是利用以上原理计算出裂纹尖端的应力强度因子的分布，同时依据应力强度因子判断出裂纹扩展的方向。

1.2 最大拉应力准则(MTS)

裂纹扩展准则采用最大拉应力准则(MTS)，裂纹将沿着最大周向应力 $\sigma_{\theta\max}$ 方向进行扩展，而环向应力可以表示为：

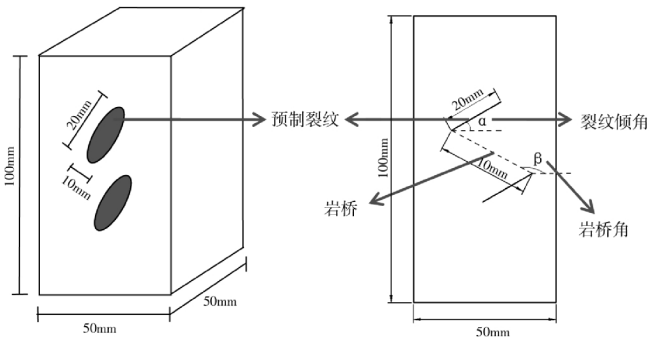
$$K^r{}_{\mathrm{I}}(\theta)=\sigma_{\theta\theta}\sqrt{2\pi r}=\cos\frac{\theta}{2}\left[K_{\mathrm{I}}\cos^2\frac{\theta}{2}-\frac{3}{2}K_{\mathrm{II}}\sin\theta\right] \tag{15}$$

令 $\frac{\partial K^r{}_{\mathrm{I}}(\theta)}{\partial\theta}=0$，$\frac{\partial K^r{}_{\mathrm{I}}(\theta)^2}{\partial\theta^2}\leqslant 0$，可计算得裂纹的扩展方向。

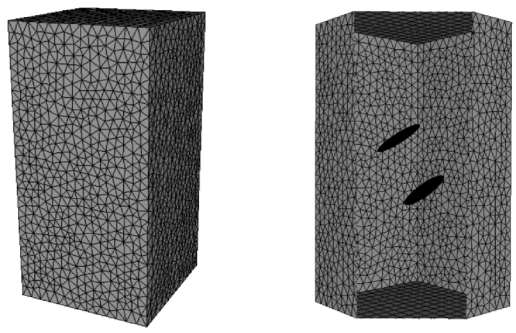
2 计算模型及方案

本文模型尺寸如图 1(a)所示，相应的模型网格剖分图如图 1(b)所示。试件为立方体试件，长×宽×高为 50mm×50mm×100mm，岩桥长度为 10mm，裂纹倾角为 α，岩桥角为 β。插入三维内裂纹尺寸为 2a×2b=20mm×10mm 的椭圆形三维内裂纹，材料的弹性模量为 E=17.92GPa，泊松比 μ=0.192，密度 ρ=2.3g/cm^3。

计算边界条件为：模型底部施加固定三个方向的位移约束，模型上部施加固定 x 与 z 方向的位移约束，



(a)试样设计图



(b)网格剖分图

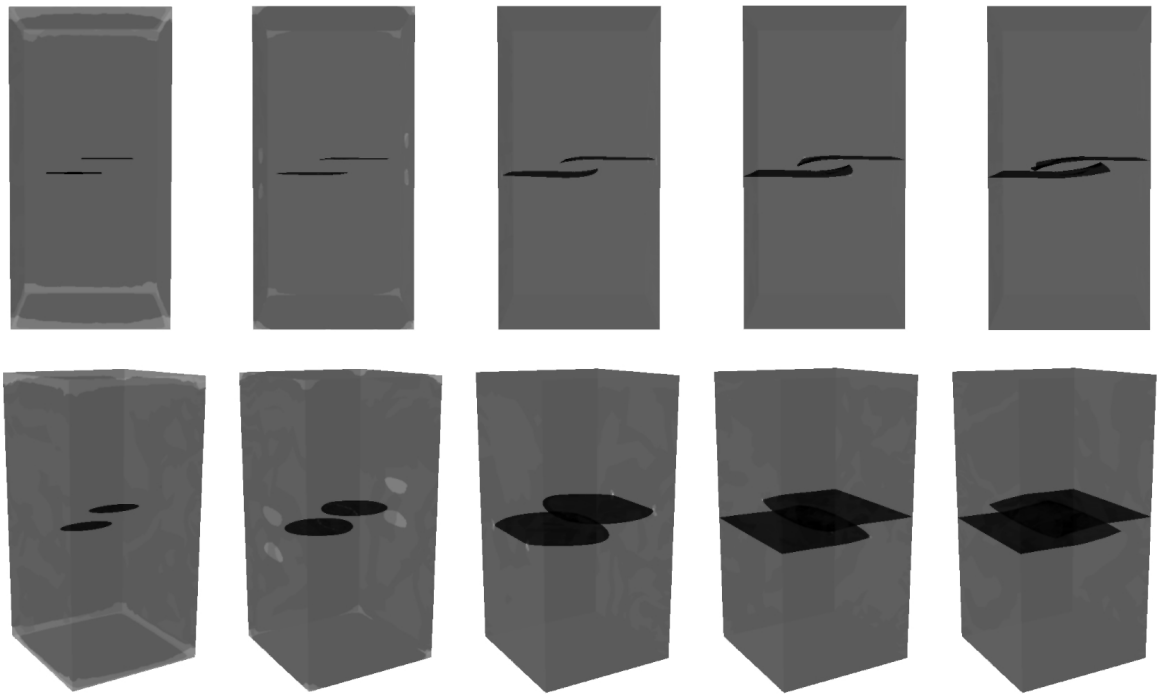
图 1 计算模型及网格剖分

同时 y 方向施加应力边界。

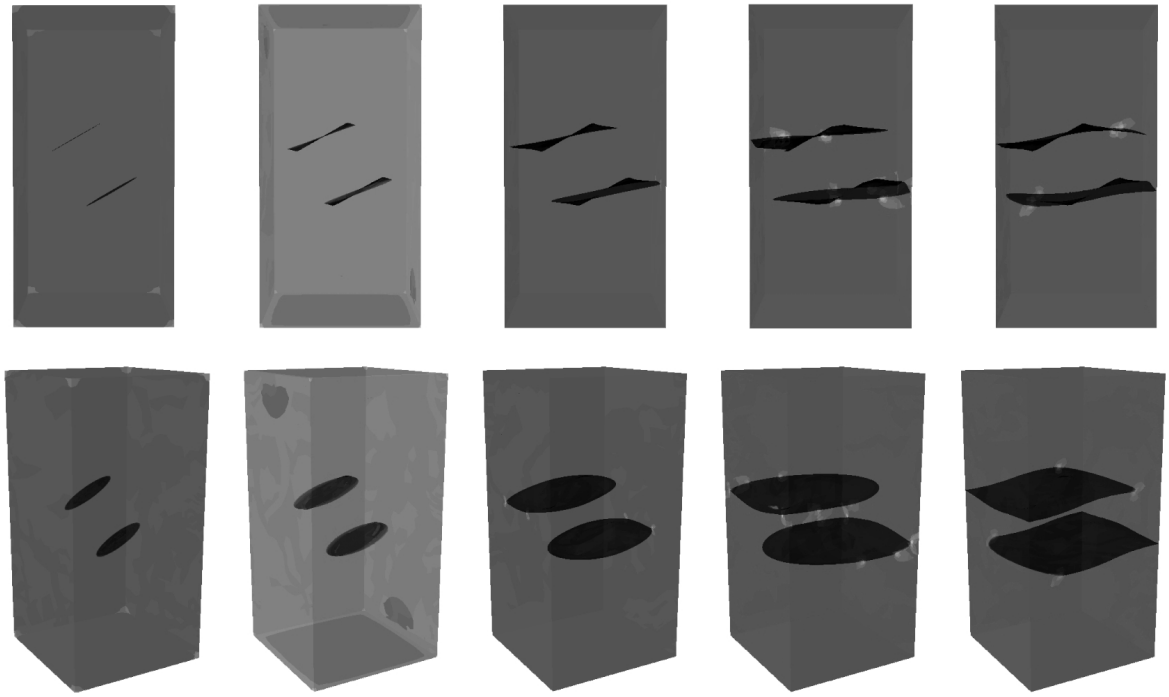
本文保持岩桥角 β 不变，改变三维内裂纹的倾角 α，研究不同裂纹倾角下双裂纹的扩展贯通过程以及应力强度因子的变化。岩桥角 β=120°，三维内裂纹的倾角 α 分别为 0°，30°，45°，60°。

3　裂纹扩展过程

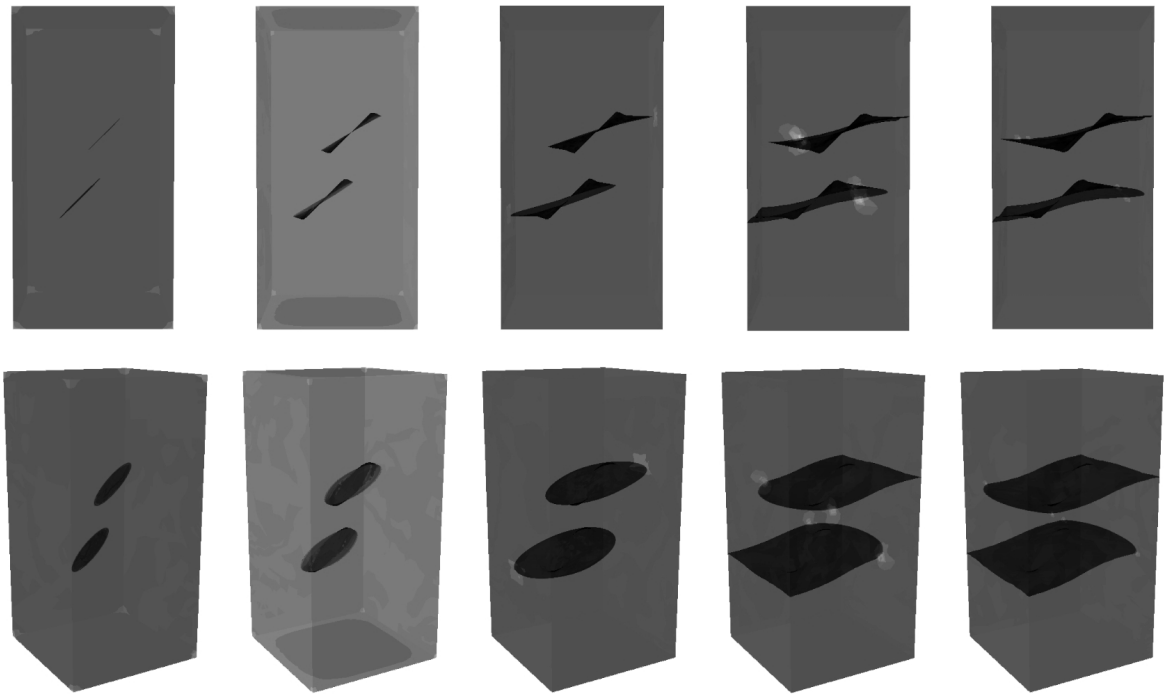
岩桥角 β=120°，三维内裂纹的倾角 α 分别为 0°，30°，45°，60°时，内裂纹扩展过程见图 2。



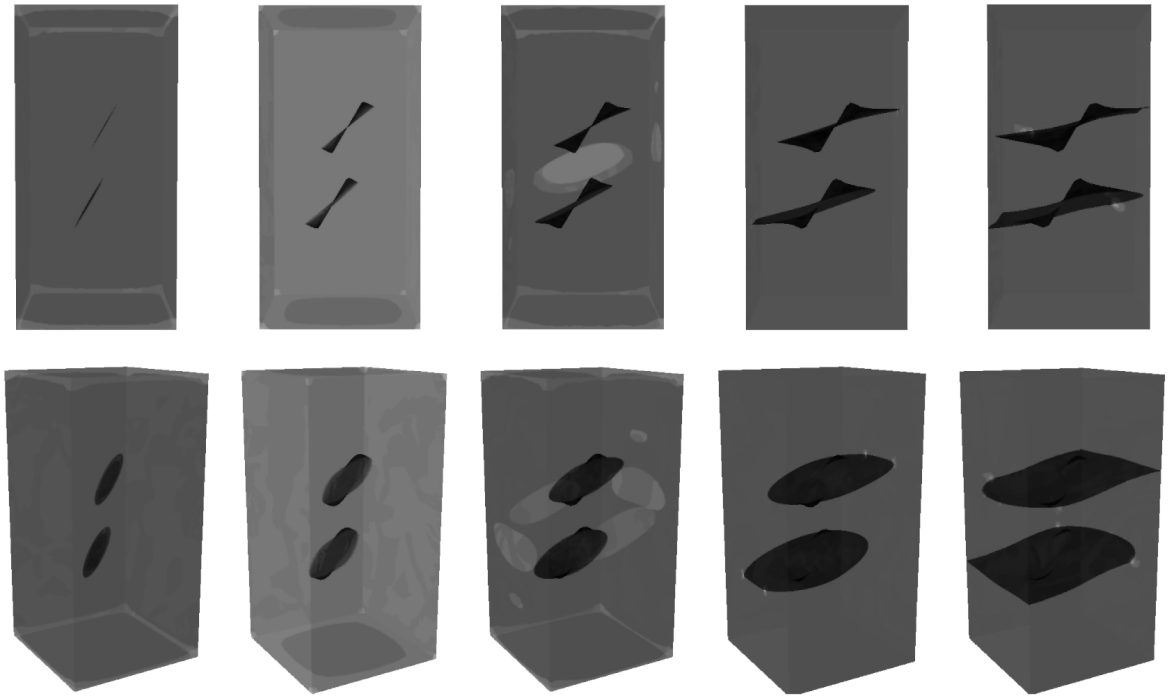
(a) β=120°，α=0°



(b) β=120°，α=30°



(c) β=120°，α=45°



(d) β=120°，α=60°

图 2 裂纹扩展过程

数值模拟结果显示：

(1)含三维内裂纹的倾角 α=0°、α=30°时，在单轴拉伸荷载作用下，两裂纹之间出现相互吸引作用；三维内裂纹所观察到的规律与二维不同，裂纹扩展尖端呈现圆弧状，仅当裂纹扩展到边界，裂纹尖端才会变平。

(2)含三维内裂纹倾角 α=45°、60°时，两裂纹之间不存在相互吸引的趋势；由于两条裂纹的相互作用，使得裂纹内侧尖端扩展要小于外侧尖端，裂纹扩展先贯

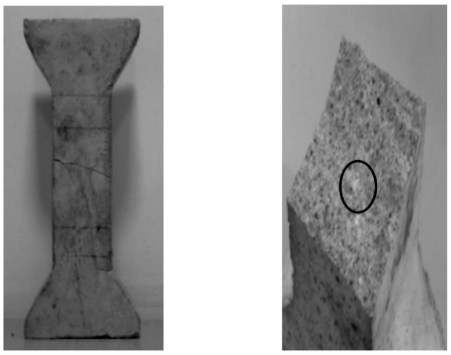
穿试件的左右表面，后贯穿试件的前后表面形成贯穿性裂纹；裂纹倾角越大，裂纹扩展越明显。

4　模型验证

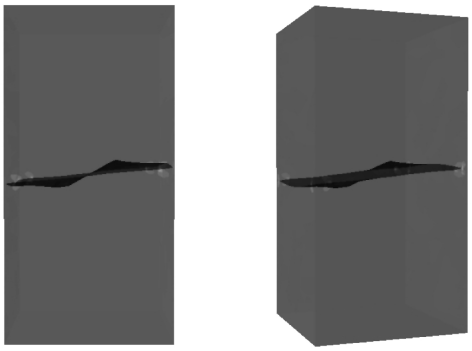
为验证本次数值模拟的合理性，引用文献[11]中室内试验成果，进行裂纹试件单轴拉伸试验与数值模拟结果的对比验证。

文献[11]对含两条预制裂纹的标准立方体试件在单轴拉伸作用下裂纹扩展过程进行了室内试验研究，试件断口见图 3(a)，本文对含两条内裂纹且裂纹倾角 α=30°的方案进行了数值模拟，数值模拟结果见图 3(b)。

从图 3 来看，裂纹尖端呈现“翼裂纹”状扩展，破裂面沿着试件横向破坏，即裂纹扩展面垂直于最大主应力方向，验证了数值模拟的合理性。



(a)室内试验成果

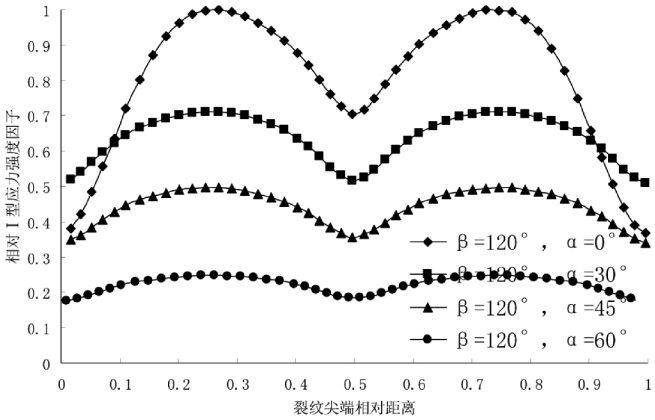


(b)数值模拟结果

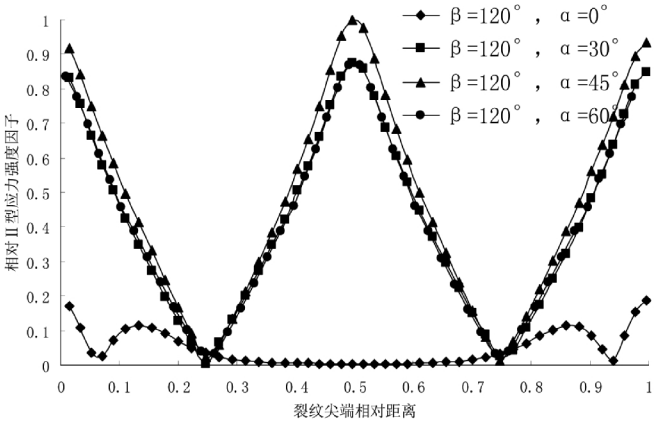
图 3　室内试验与数值模拟验证

5　应力强度因子变化

为直观描述裂纹尖端的应力强度因子随裂纹角度的变化规律，定义不同计算方案下的相对应力强度因子 $|K_i|/|K_{max}|$，以预制裂纹内侧尖端为起点，逆时针环绕裂纹前缘一周的距离为 1，分析相对应力强度因子随裂纹尖端相对位置的变化规律。不同倾角下的相对应力强度因子变化见图 4。



Ⅰ型相对应力强度因子



Ⅱ型相对应力强度因子

图 4　相对应力强度因子

由图 4 可知：

(1) 相对Ⅰ型应力强度因子随着裂纹尖端距离的变化(从相对距离 0 变化到相对距离 1)呈现先增大后减小再增大再减小的规律，相对Ⅰ型应力强度因子在裂纹的左右侧达到最小，在前后侧达到最大。

(2) 相对Ⅱ型应力强度因子随着裂纹尖端距离的变化呈现先减小后增大再减小再增大的规律，当裂纹倾角 α=0°时的相对Ⅱ型应力强度因子在裂纹左右尖端不为 0，而在其他距离处为 0，这表明预制裂纹尖端的相互作用是由Ⅱ型应力强度因子控制。

(3)对于不同裂纹的倾角来说，倾角越大，相对Ⅰ型应力强度因子越小，相对Ⅱ型应力强度因子总体上越大；在预制裂纹倾角为 30°与 60°时两者的相对Ⅱ型应力强度因子几乎一样。

(4)预制裂纹内侧的Ⅰ型应力强度因子大于外侧，这是由于双裂纹之间的相互作用导致的。

根据文献[12,13]的研究，图 3 中裂纹上下尖端的无量纲Ⅰ型应力强度因子可以表达为：

$$Y^{A}{}_{I}=\frac{2sx^{1.5}i}{\sigma_1(x-y)\sqrt{(x+y)}}\left[1-\frac{E(m)}{K(m)}\right] \tag{16}$$

$$Y^{B}{}_{I}=\frac{-2si}{\sigma_1(x-y)\sqrt{y(x+y)}}\left[y^2-x^2\frac{E(m)}{K(m)}\right] \tag{17}$$

式中：x，y 为裂纹尖端的横坐标，i 为虚数单位；s 为纯虚数；K(m)与 E(m)为第 1 类与第二类椭圆积分。对式(16)，(17)进行整理可得：A 点的Ⅱ型应力强度因子要小于 B 点，因此双裂纹试件的裂纹内侧的Ⅰ型应力强度因子大于外侧，本文的数值模拟结果也验证了此处理论解的规律。

6 结 论

(1)单轴拉力作用下，预制裂纹尖端首先出现翼型裂纹，随后裂纹逐渐向四周扩展，裂纹先贯穿试件左右两面，后贯穿试件的前后面形成贯穿型裂纹。

(2)三维内裂纹倾角 α=0°，30°时，裂纹尖端翼裂纹扩展后期两条翼裂纹呈现相互吸引的规律，当三维预制内裂纹倾角 α=45°、60°时，翼裂纹之间不存在相互吸引的趋势，裂纹内侧尖端的翼裂纹扩展小于外侧尖端。

(3) 相对Ⅰ型应力强度因子随裂纹尖端相对距离的变化规律为先增大后减小再增大再减小的规律，相对Ⅱ型应力强度因子随着预制裂纹尖端相对距离的变化规律为先减小后增大再减小再增大。

(4) 本文研究成果可以为含多裂纹岩石裂纹扩展规律及数值模拟提供相应的参考。

参考文献：

[1] Griffith A A. The Phenomena of Rupture and Flow in Solids[J]. Philosophical Transactions of the Royal Society of London，1921，221(2):163~198.

[2] 应鹏，朱哲明，周磊，等. 中低速冲击下Ⅰ型裂纹的动态断裂韧度研究[J]. 煤炭学报，2017，42(s2)：338~345.

[3] 秦洪远，黄丹，刘一鸣，等. 基于改进型近场动力学方法的多裂纹扩展分析[J]. 工程力学，2017，34(12)：31~38.

[4] 崔臻，侯靖，吴旭敏，等. 脆性岩体破裂扩展时间效应对引水隧洞长期稳定性影响研究 [J]. 岩石力学与工程学报，2014，33(05)：983~995.

[5] 李响，怀震，李夕兵，等. 基于裂纹扩展模型的脆性岩石破裂特征及力学性能研究[J/OL]. 黄金科学技术:1-18[2018-12-20].

[6] 何理，钟冬望，宋琨.基于裂纹扩展的岩体爆破损伤计算方法[J]. 化工矿物与加工，2018(12):69~72.

[7] Horii H，Nemat -Nasser S. Elastic fields of interacting inhomogeneities [J]. International Journal of Solids & Structures，1985，21(7):731~745.

[8] Tang C A，Lin P，Wong R，et al. Analysis of crack coalescence in rock-like materials containing three flaws-Part II：numerical approach[J]. International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences，2001，38(7)：925~939.

[9] 黄明利，黄凯珠. 三维表面裂纹相互作用扩展贯通机制试验研究[J]. 岩石力学与工程学报，2007，26(9)：1794~1799.

[10] 孙欣，朱哲明，谢凌志，等. 基于 SENDB 试样的砂岩复合脆性断裂行为研究 [J]. 岩石力学与工程学报，2017，36(12)：2884~2894.

[11] 李术才，杨磊，李明田，等. 三维内置裂隙倾角对类岩石材料拉伸力学性能和断裂特征的影响 [J]. 岩石力学与工程学报，2009，28(2):281~289.

[12] Zhu Z，Wang L，Mohanty B，et al. Stress intensity factor for a cracked specimen under compression [J]. Engineering Fracture Mechanics，2006，73(4)：482~489.

[13] 朱珍德，林恒星，孙亚霖. 透明类岩石内置三维裂纹扩展变形试验研究[J]. 岩土力学，2016，37(04)：913~921+928.

编辑：张绍付

Numerical simulation of one-axis tensile crack propagation of bias three-dimensional internal crack

LIU Danzhu[1], WANG Yixing[1], XIAO Wang[2]

(1. Jiangxi Provincial Water Resources Planning and Design Research Institute, Nanchang 330029 China;
2. Lianyungang Gold Coast Development and Construction Co. Ltd, Lianyungang 222000 China)

Abstract: In order to study the process of crack propagation under uniaxial stress, the crack propagation process and the stress intensity factor of the front edge of the crack are obtained by the numerical simulation of the three-dimensional crack calculation software Franc 3d. The results show that: (1) under uniaxial tension, the wing crack first appears at the tip of the precast crack, and then the crack propagates around the specimen. The crack first runs through both sides of the specimen and then through the front and back of the specimen. (2) in the case of three dimensional precast internal crack inclination α=0 degree and 30 degree, the two wing cracks at the tip of the precast crack tip exhibit mutual attraction during the later stage of crack growth. When the angle of internal crack is 45° and 60°, there is no tendency to attract and approach each other between wing cracks, and the propagation of wing crack at the inner tip of precast crack is smaller than that on the outer tip of precast crack. (3) the relative mode I stress intensity factor changes with the distance of prefabricated crack tip (from relative distance 0 to relative distance 1). Compared with the mode Ⅱ stress intensity factor, the stress intensity factor decreases first and then decreases and then increases with the change of the distance between the prefabricated crack tip and the crack tip.

Keywords: Bias three-dimensional internal crack; Uniaxial tension; Crack propagation; Numerical simulation

翻译：刘丹珠